

הצהרת צוות הפיתוח על שימוש במצגת

- מצגת זאת פותחה לצורך ניסוי מחקרי ונמסרת לשימוש רק על פי הרשאה בכתב מצוות המחקר בטכניון.
- אין להעביר את המצגת לשום גורם אחר ואין לעשות בה כל שימוש ללא קבלת הרשאה בכתב מצוות המחקר.
- לקבלת הרשאה נא לשלוח דוא"ל אל:

keshercham.technion@gmail.com

ולציין בשורת הנושא: הרשאה לשימוש בהבזק [שם ההבזק]



הקרן הלאומית למדע

משרד המדע,
הטכנולוגיה והחלל
Ministry of Science, Technology & Space





הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל
הפקולטה לחינוך למדע וטכנולוגיה
קשר חם: מרכז מו"פ לקידום שיפור
ורענון החינוך המתמטי בישראל
מוסד הטכניון למו"פ



הבזק זה חובר על ידי בתיה עמית בשיתוף עם נצה מובשוביץ-הדר

בהמשך תרמו לשיפורו (לפי סדר א"ב) :
צבי ארדשטין, גיא בושושה, כרמית בנבנישתי-שפילקה,
שבתי ג'רטשק, אסף דביר, טל זוהר, ורדה זיגרסון, קלרה
זיסקין, ורד לוי, אלעזר ניומן, הרב מרדכי סיינה, איליה
סיניצקי, יובל קלי, אירית רייכטלר, עטרה שריקי.
עדכון שוטף נחוץ בשקף 10 (תיכון בליך) ובשקף 25
עודכן לאחרונה ב- 14.3.2018



הקרן הלאומית למדע



משרד המדע,
הטכנולוגיה והחלל
Ministry of Science, Technology & Space



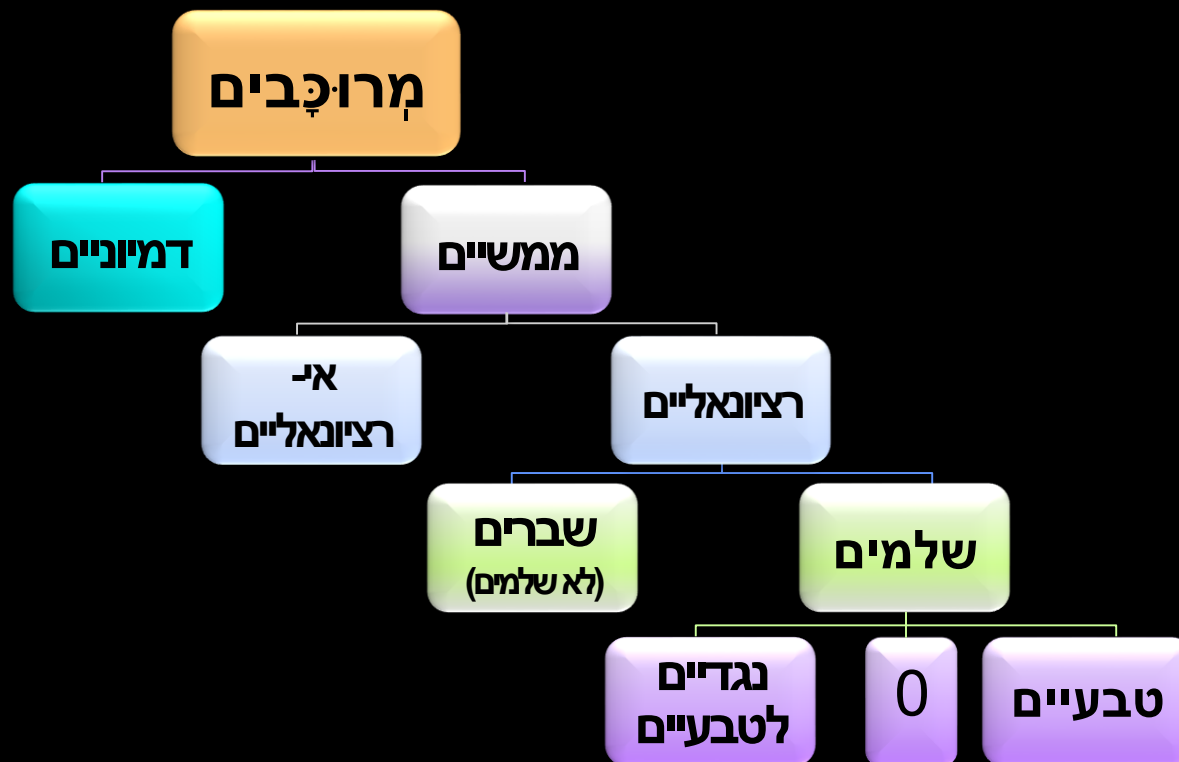
הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל
מוסד הטכניון למחקר ופיתוח

הספרות של π



© כל הזכויות שמורות ל"קשר חם", הטכניון

משפחות המספרים



מכירים את הסרט: מסע בין הכוכבים ?



<http://www.thegreenasterisk.com/2012/05/star-trek-asterisk-wolf-in->

<https://www.youtube.com/watch?v=H20cKjz-bjw>

- גיבורי הסרט, קפטן קירק (Kirk) והמפקד ספוק (Spock), נאבקים בכוח רשע ערטילאי - ג'ק המרטש, שהשתלט על ספינת-החלל אנטרפרייז.
- הם מגרשים מהמחשב את כוח הרשע המפחיד.
- איך? - הם פוקדים על המחשב, המניע את כל המערכות, לחשב את הספרה האחרונה של π ...

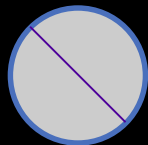
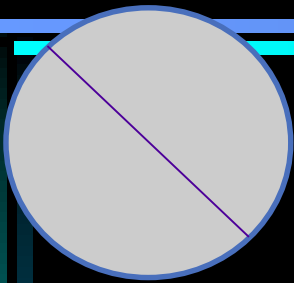
- מה התחכום בפקודה הזאת?
- זוהי משימה שתעסיק אותו בלי סוף, וכך לכוח הרשע אין עוד מקור מחיה, והוא נזרק לחלל ומתפורר לרסיסים.

מי מכיר ספרות נוספות על שתי הספרות הראשונות של π אחרי הנקודה העשרונית?

- 8 הספרות הראשונות אחרי הנקודה הן: 3.14159265
וזה לא הסוף... זה ממשיך וממשיך בלי מחזוריות וסדר.

• בבית הספר היסודי מלמדים לפעמים ש- π שווה בקירוב $22/7$.
האם זהו קירוב טוב?

- מסתבר שלא, כי $22/7$ שווה ל- 3.142857142857...
וכבר הספרה העשרונית השלישית שלו שונה מהערך הנכון.



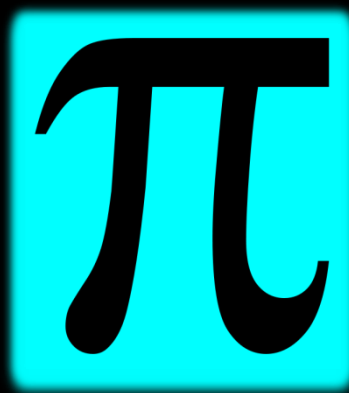
π מהו?

- בכל המעגלים למיניהם, קיים יחס קבוע בין ההיקף לקוטר, (זה ידוע מזמן וניתן להוכחה, אבל לא נעשה זאת היום).
- האות היוונית π (פאי), נבחרה לייצג את היחס הקבוע הזה כי היא האות הראשונה של המילה היוונית "περίμετρος" (פריפריה) שמשמעותה מעגל.
- דרך אגב, המילה האנגלית להיקף היא *Perimeter* ולכן נהוג לסמן היקף באות P .
- במהלך ההסטוריה התברר שהיחס הקבוע הזה הוא מספר לגמרי לא פשוט: הוא לא מספר שלם והוא לא שבר פשוט. הייצוג שלו כמספר עשרוני הוא לא סופי (לא 3.14 !!!). הייצוג העשרוני האינסופי שלו הוא לא מחזורי.

נא להכיר: חמישים הספרות הראשונות אחרי הנקודה העשרונית של π :

3.14159265358979323846264338327950
288419716939937510

וזו רק ההתחלה!



הידעתם?

- ב-14 במרץ מציינים בארה"ב וברחבי העולם את

יום פאי 3.14

המהדרין חוגגים אותו בשעה 1:59

3.14159

- ביום פאי של שנת 2004 קבע הגאון-האוטיסט דניאל טאמט

שיא אירופי בדיקלום המספר π , כאשר דיקלם אותו עד

הספרה ה-22,514 שלו אחרי הנקודה העשרונית.

- ב-2005 דיקלם הסיני לו צ'או (Chao Lu) ללא טעות

67,890 ספרות.

- רוצים לנסות את כוחכם? – היכנסו לקישור:

<http://www.pbs.org/newshour/rundown/pi-quiz/#.UymnfCY6J6c.email>

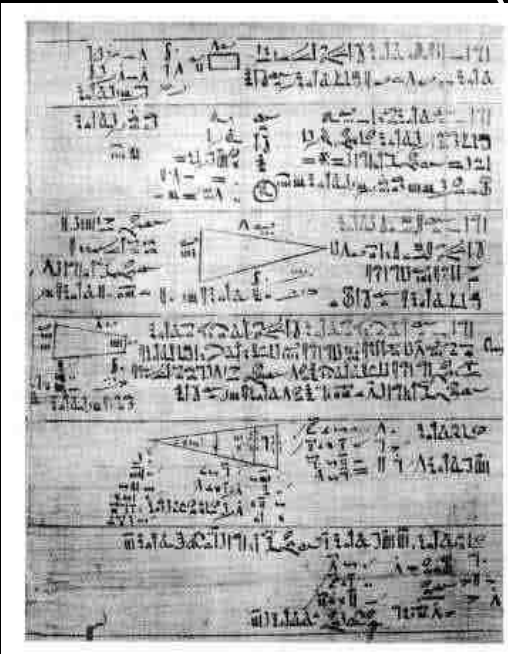
ידיעה מסוכנות הידיעות FOX: 4.10.2006

- באולם ציבורי בקיסאראזו (Kisarazu), מזרחית לטוקיו, יפני
- כבן 60 בשם אקירה האראגוצ'י (Akira Haraguchi) דיקלם בעל-פה את 100,000 הספרות הראשונות אחרי הנקודה של π .
- הדיקלום ארך יותר מ-16 שעות. בכך הוא שבר שיא קודם שלו עצמו משנת 1995 - אז דיקלם "רק" 83,431 ספרות.
- מאז נערכות תחרויות דקלום במקומות שונים בעולם.
- <http://pi-world-ranking-list.com/index.php?page=lists&category=pi>, ובארץ, בתיכון "בליך" ברמת-גן נערכת תחרות שנתית לדיקלום הספרות בפיתוח העשרוני של המספר פאי. בשנת 2018 עמרי קובי, תלמיד כיתה י' שבר את שיא בליך הקודם 1051 שעמד על ספרות ורשם מהזכרון 1071 ספרות.

(ר' ביו-טיוב: <https://www.youtube.com/watch?v=qKJBkypxaf4>)

π הקסים וסיקורן מתימטיקאים אלפי שנים

- טבעי להניח שהיחס הקבוע בין ההיקף לקוטר הוא שבר פשוט ואכן נמצאו ראיות לכך שכבר באלף השני לפני הספירה השתמשו הבבלים ביחס $25/8$ (גדול מ-3).



The Rhind papyrus

- לפי מסמך עתיק הידוע בשם **פפירוס רהינד** המצוי כעת ב'מוזיאון הבריטי',

חישוב הספרות של π החל כבר בסביבות 1500-1650 לפנה"ס.

- בפפירוס, חושב π כ: $3.1605 \approx 4 \times \left(\frac{8}{9}\right)^2$

הפפירוס נקרא על שם חובב עתיקות

סקוטי, **אלכסנדר הנרי רהינד** (Rhind).

- בשנת 1858, הוא קנה את הפפירוס בלוקסור שבמצרים.

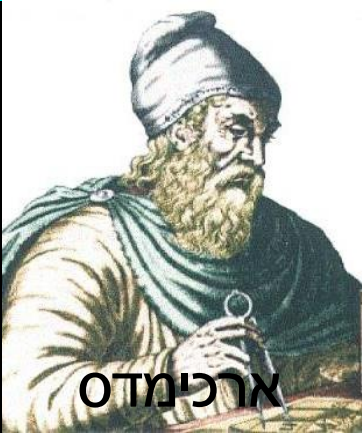
תיאור בניית מקדש שלמה (כ-1,000 לפנה"ס)

בתנ"ך מדובר באגן עשוי מחומר מוצק ששימש לנטילת ידי הכוהנים לפני עבודת העלאת הקרבן על המזבח. הקוטר (משפה לשפה) מתואר כ-10 אמה וההיקף (יִסֹב אֹתוֹ סָבִיב) מופיע כ-30 אמה.

היחס המתקבל בין ההיקף לקוטר הוא 3. מידות הכלי מצביעות על כך שהתיאור איננו מדויק כי ממנו עולה ש- $\pi = 3$.



"וַיַּעַשׂ אֶת-הַיָּם, מוֹצֵק:
עֲשֹׂר בָּאַמָּה מִשְׁפָּתוֹ עַד-
שְׁפָתוֹ עָגַל סָבִיב,
וְחִמֵּשׁ בָּאַמָּה קוֹמָתוֹ, וְקוֹה
(וְקוֹ) שְׁלֹשִׁים בָּאַמָּה, יִסֹּב
אֹתוֹ סָבִיב.
(מלכים א, פרק ז, פסוק כ"ג)



ארכימדס

π של ארכימדס

- ארכימדס היה מתמטיקאי יווני.
- בסביבות 250 לפנה"ס, הוא חישב את π .
- ארכימדס הכיר רק שברים פשוטים.
- השברים העשרוניים טרם הוגדרו באותה עת. 211-287 לפנה"ס
- בשרידי מאמרו "מדידת העיגול" נמצא אי-השוויון הבא:

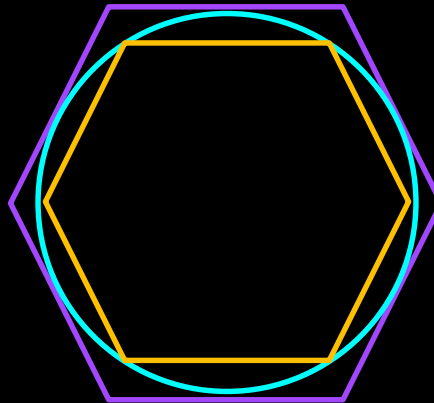
$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7} \equiv \frac{22}{7}$$

- בימינו אפשר לתרגם את אי השוויון של ארכימדס, לשברים עשרוניים כך:
- $3.141 < \pi < 3.142$
- איך עשה ארכימדס את החישוב?

- הוא חשב על הגיאומטריה של המעגל ועל מצולעים שונים
 אותם המעגל חוסם ואחרים בהם הוא חסום, הנה כך -

החשיבה והחישוב של ארכימדס

- נתחיל ממשושים. כל מעגל **חוסם** משושה משוכלל.
- **היקף המעגל גדול מהיקף המשושה** המשוכלל אותו הוא חוסם.



- כל מעגל **חוסם** במשושה משוכלל.
- **היקף המעגל קטן מהיקף המשושה** המשוכלל בו הוא חוסם.
- נעבור לחישוב שארכימדס עשה, כנראה:

החשיבה והחישוב של ארכימדס

- נחשב תחילה את היקף המשושה המשוכלל **החסום** במעגל שרדיוסו R :

- המשושה הזה** מורכב מ-6 משולשים שווים-צלעות ו- R הוא גם אורך **הצלע** בכל אחד מהם.

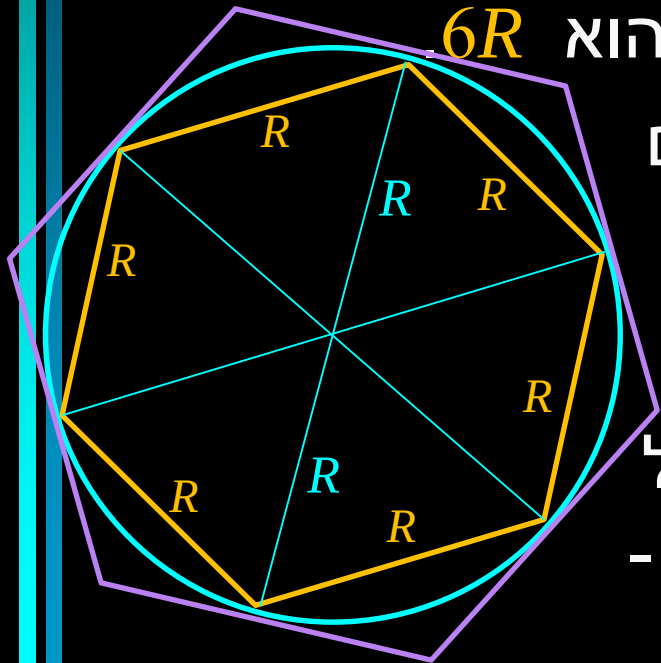
- לכן, היקף המשושה המשוכלל **החסום** הוא $6R$

- ומפני שהוא **קטן** מהיקף **המעגל**, נרשום

$$6R < 2\pi R$$

$$3 < \pi \quad \text{כלומר}$$

- נזכור את זה ונעבור לחישוב ההיקף של המשושה המשוכלל **החוסם** את המעגל -



החשיבה והחישוב של ארכימדס

• נסמן ב- x את מידת הצלע של המשושה הזה.

• גם הוא מורכב מ-6 משולשים ש"צ, שבכל אחד מהם R , שהוא רדיוס המעגל, הוא גם הגובה וגם חוצה את הצלע של המשושה.

• לפי משפט פיתגורס $R^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = x^2$

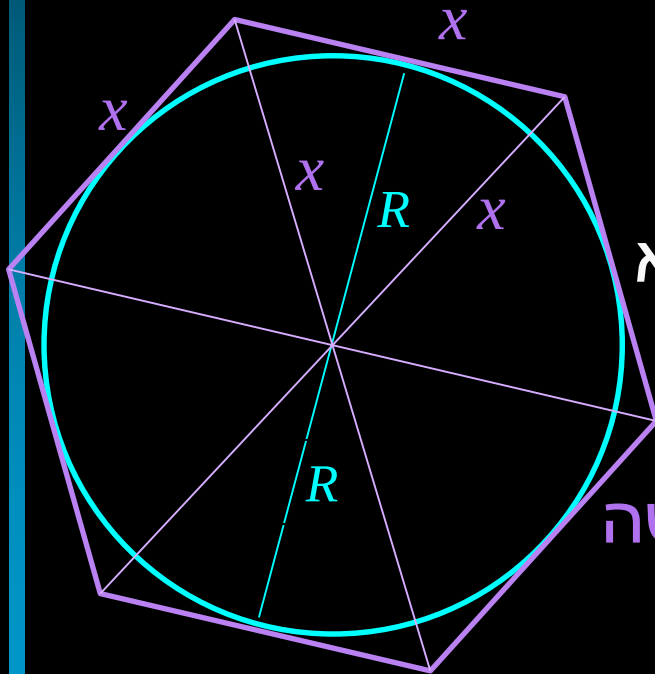
מכאן: $R^2 = x^2 - \frac{x^2}{4} = \frac{3}{4}x^2 \Rightarrow x = \frac{2R}{\sqrt{3}}$

לכן היקף המשושה המשוכלל החוסם הוא

$$6 \times \frac{2R}{\sqrt{3}} = \frac{12R}{\sqrt{3}}$$

• ומפני שהיקף המעגל קטן מהיקף המשושה

$$2\pi R < \frac{12R}{\sqrt{3}} \Rightarrow \pi < \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$



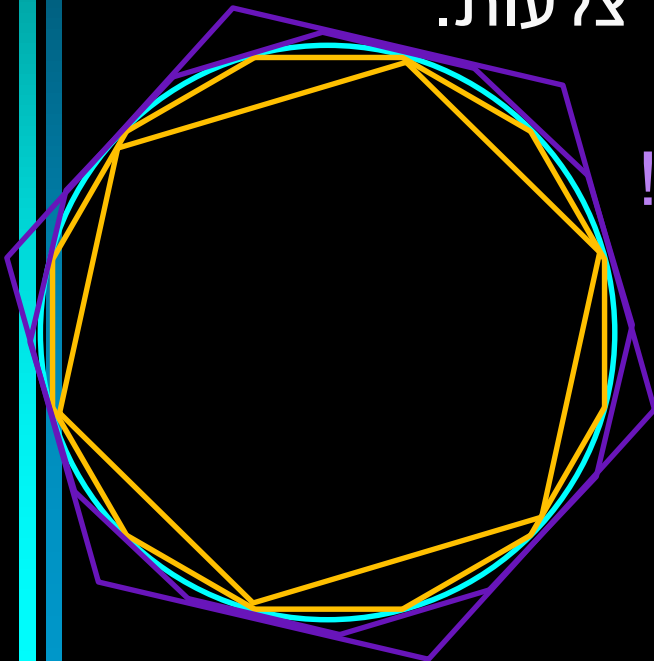
החשיבה והחישוב של ארכימדס

- כך, מהשוואת היקף המעגל עם היקפי המשושים המשוכללים ארכימדס קיבל את ההערכה $3 < \pi < 2\sqrt{3}$
- כדי לקבל הערכה מדויקת יותר, ארכימדס הכפיל את מספר הצלעות במצולעים המשוכללים החוסמים והחסומים מ-6 ל-12 ובהמשך מ-12 ל-24, 48 ועד 96 צלעות.
- ככל שמספר הצלעות הולך וגדל, אורכן של הצלעות הולך וקטן, והדיוק הולך וגדל!
- ההערכה הכי טובה שנמצאה בכתביו היא

(בכתיב המקובל כיום)

$$\left(\frac{223}{71}\right) = 3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70} (= \frac{22}{7})$$

$$3.141 < \pi < 3.142 \quad \text{או}$$



החתירה לדיוק

- במשך מאות שנים, דורות של מתמטיקאים שיכללו את שיטתו של ארכימדס כדי להגיע לדיוק הולך וגדל. וכך -



Ludolph
van Ceulen
1540-1610

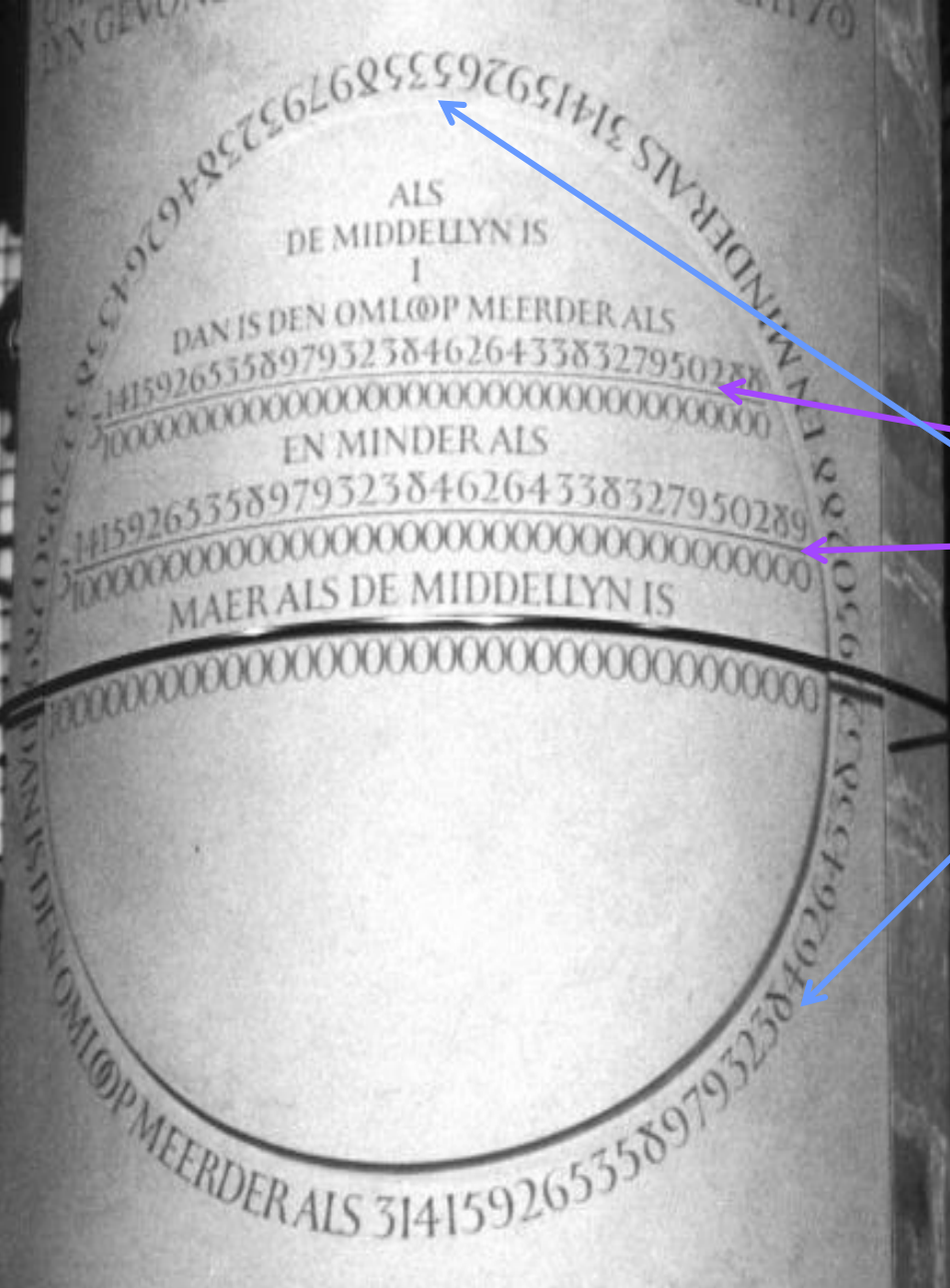
- בשנת 500 לספירה ידעו כבר ש $\pi \approx 3.1416$
- ועד שנת 1000 לספירה ידעו קירוב של 10 ספרות
- בשנת 1596 הגיע ההולנדי לודולף ון-קולן לשיא של תקופתו.

הוא הקדיש שנים רבות מחייו לחישוב ערכו של π ע"י הכפלת מספר הצלעות במצולע **החסום והחוסם**.
כך הגיע למצולעים בני 2^{62} צלעות, וקיבל:

3.141,592,653,589,793,238,462,643,383,279,502,88

$< \pi <$

3.141,592,653,589,793,238,462,643,383,279,502,89



על מצבתו של
Ludolph van Ceulen
נרשם הקירוב בשתי צורות:
גם כשני שברים שהמכנים
שלהם הם 10^{35}
וגם כמספרים עשרוניים

מאז זכה היחס הקבוע בין
היקף המעגל לקוטרו לשם:
מספר לודולף

המצבה בעיר Leiden, הולנד,
ששופצה בשנת 2000.
<http://www.ams.org/samplings/math-history/hap-6-pi.pdf>

מ"מספר לודולף" ל - π



William Jones
(1675-1749)

השימוש בכינוי ובסמל π הפך לנחלת הכלל במאה ה-18, בימיו של המתמטיקאי השוויצרי הנודע - ליאונרד אוילר ובזכותו.



Leonard Euler
(1707-1783)

הכינוי פאי והסמל π ניתנו על ידי המתמטיקאי האנגלי, ויליאם ג'ונס.

מה עשו מתמטיקאים אחרים עם הרעיון של ארכימדס במשך השנים?

- מאז ימי ארכימדס, ובמיוחד במשך 400 השנים האחרונות, מתמטיקאים מנסים להגדיל את הידע של הספרות של π אחרי הנקודה העشرונית.
זאת למרות שעבור כל מטרה מעשית העולה על הדעת – דיוק של 35 ספרות הוא דיוק מספיק ביותר.
- מה אם כן מניע את המתמטיקאים להגדיל את מספר הספרות הידועות של π אחרי הנקודה העשרונית?
– בראש ובראשונה הסקרנות ויצר החקירה.

המחשבים מתגייסים לחישוב

- בשנת 1949 - ראשוני המחשבים האלקטרוניים מגיעים לחישוב של 2000 ספרות אחרי הנקודה.
- בשנת 1958 - 10,000 ספרות.
- בשנת 1961 - 100,000 ספרות.
- בשנת 1973 - 1,000,000 (מיליון) ספרות.
- בשנת 1989 - המתמטיקאי היפני יָסוּמָּשָׁה קָנָדָה (Yasumasa Kanada) מחשב ביליון (מיליארד) ספרות (1,000,000,000).
- בשנת 1999 - 206 ביליון ספרות (ביליון = אלף מיליונים, זוכרים?).

חדשות על הספרות העשרונית של π



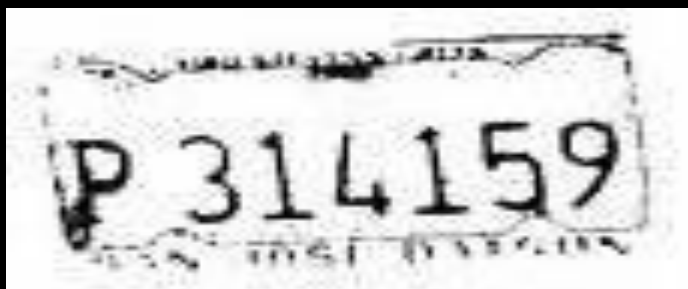
בשנת 2002, המתמטיקאי היפני יסומֶּשָה קנָדָה, יליד שנת 1949, יחד עם קבוצה של תשעה חוקרים מתחום מדעי-המחשב באוניברסיטת טוקיו,

Yasumasa Kanada

חישבו שיא של מעל טריליון ספרות

(טריליון = מיליון מיליונים $10^{12} = 1,000,000,000,000$)

החישוב נמשך 600 שעות ונעשה באמצעות 64 מעבדים של חברת היטאצ'י היפנית.



מספר לוחית הרישוי ברכב של יסומשה קנדה

<http://www.cage.curtin.edu.au/~jfk/pi.html>

14.3.2018 עודכן

הספרות של פאי © כל הזכויות שמורות

שיאים חדשים בחישוב הספרות של פאי



המחשב שבצע את חישוב π
בדיוק של 5 טריליון ספרות

- עד 2 באוגוסט 2010, חושבו "רק" חמישה טריליון ספרות... (5 ואחריו 12 אפסים!)
- החישוב החל ב-4 במאי והסתיים ב-2 באוגוסט – 3 חודשים ברציפות.
- לאישרור התוצאה, אחרי שנתקבלה, נדרשו 130 שעות מחשב (מעל 5 יממות).

• נכון להיום, חושב הפיתוח העשרוני של

π עד 22.4 טריליון ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

מעוניינים לקרוא עוד על כך? היכנסו לאתר

<http://www.numberworld.org/y-cruncher/>

חישובים במספרי ענק

- מתמטיקאים מונעים לרוב על ידי סקרנות ויצר החקירה!
- בשנים האחרונות נמצא מניע נוסף: שיפור טכניקות חישוב בעלות דיוק גבוה, עבור חישוב π מהווה אמצעי בקרה ומבחן!
- חישובים של למעלה מטריליון ספרות, דורשים מחשבי-על.
- חישוב π בדיוק גבוה, הוא תובעני הן מבחינת זמן החישוב והן מבחינת גודל הזיכרון הנדרש לכך. לכן:
- ביצוע החישובים בשיטות השונות, מהווה אבן-בוחן ליכולות המחשב לאחסן, לשלוף ולעבד כמויות עצומות של נתונים.
- התהפכו היוצרות – משימוש במחשב לבדיקת הספרות של π עברנו לשימוש ב- π לבדיקת מחשבי-על! כך נמצאה סיבה מעשית חדשה למירוץ אחר הספרות של פאי.

חלק מהשאלות הפתוחות על המספר π המניעות מתמטיקאים להמשיך בחיפוש עוד ועוד ספרות

- האם כל אחת מהספרות 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 מופיעה באותה שכיחות במספר π כאשר בוחנים "הרבה מאוד" (אינסוף) מספרותיו?
- האם בכל קבוצת ספרות באורך נתון השכיחות של כל ספרה היא אותה שכיחות?
- האם מנקודה מסוימת והלאה ניתן למצוא שרשרת של 3 או יותר ספרות שחוזרת על עצמה – מופיעה פעמיים?
- השרשרת היחידה שנמצאה עד כה היא 31415926 שהופיעה פעמיים עד ל-200 מיליון ספרות!
- האם בפיתוח העשרוני של π , יש 1,000 ספרות עוקבות (או מספר אחר) שכולן אפס?

מעריצים את π ונהנים מאורו

- פסל האות היוונית π בגודל 30 רגל (כ-10 מטר) תוכנן ונוצר בשנת 2008 על ידי האומנית ברברה גריגוטס (Barbara Grygutis)



- פסל ה- π ניצב בשערי בית הספר הטכני ע"ש ג'והן אבוט בעיירה דנבורי (Danbury) במדינת קונטיקט שבארה"ב.
- כל לילה הפסל מואר בנורות LED ומאיר מתחם ברדיוס ניכר ממנו.
- התאורה ממוחשבת והתלמידים מתכנתים מיצגי תאורה דינמיים חדשים מדי פעם בפעם.

סוף ההבזק –
אך לא סוף העשייה המתמטית
הישארו מעודכנים!
בדקו חדשות נוספות!

• אם יש לך עניין לדעת היכן מופיע צירוף הספרות של תאריך
יום ההולדת שלך בין הספרות של π , עליך להיכנס לאתר
והלקליד את הספרות ללא סימנים אחרים ביניהן:
<http://mypiday.com/>

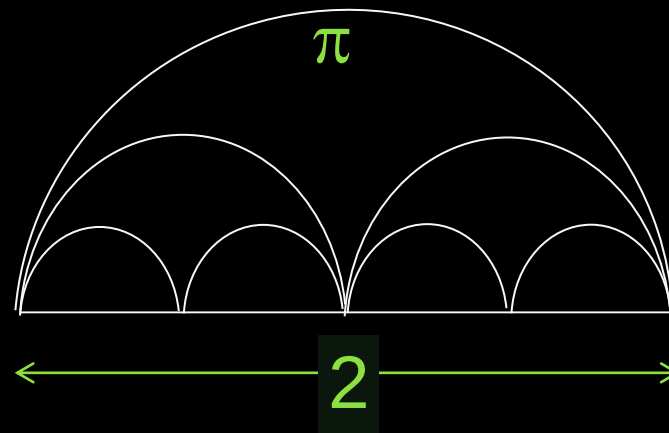
• ואם אתם אוהבים מוסיקה, תוכלו להאזין שחובר לפי
הספרות של π בקישור
<http://www.youtube.com/watch?v=OMq9he-5HUU>

שלושה פרדוקסים - לכיתות מתקדמות

- "הוכחה" ש- $\pi=2$
- "הוכחה" ש- $\pi=4$
- "הוכחה" שאינסוף מינוס אינסוף $= \pi$

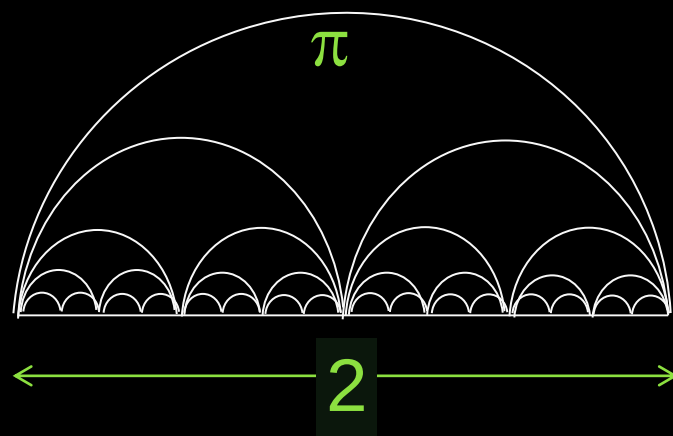
הנה הוכחה ש- $\pi=2$, איפה השגיאה???

- נצא מקטע שאורכו 2 יחידות. מהו אורך הקשת של חצי המעגל? - π (כי ההיקף כולו הוא $\pi \times d = 2\pi$)
- נחצה את הקטע ונבנה שתי קשתות. מהו סכום אורכי הקשתות? - כל אחת $\frac{1}{2}\pi$ (מדוע?) לכן שתיהן יחד π .
- נחלק ל-4 רבעים ונחזור על הבנייה. מהו סכום אורכי הקשתות? - כל אחת $\frac{1}{4}\pi$ (מדוע?) לכן ארבעתן יחד π .



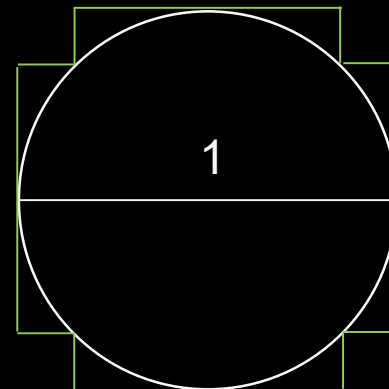
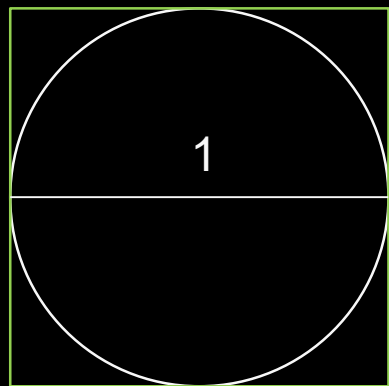
הנה הוכחה ש- $\pi=2$, איפה השגיאה???
מה יקרה לסדרת הקשתות אם נמשיך לחלק את הקטע
עוד ועוד?

- מצד אחד, הקשתות הולכות ומתקרבות אל הקטע,
שאורכו $= 2$; מצד שני, סכום אורכיהן בכל שלב הוא π .
ובכן? האם הוכחנו בכך ש- $\pi = 2$?
הייתכן?!



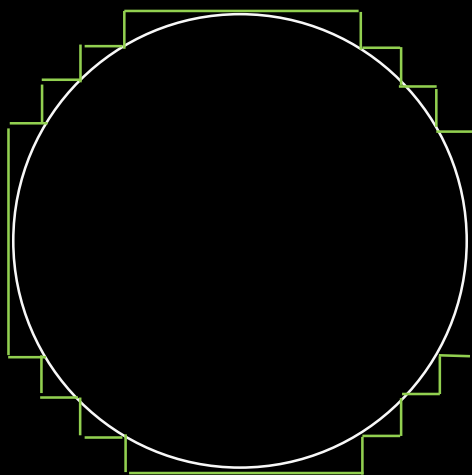
והנה הוכחה ש $\pi=4$, איפה השגיאה???

- נתחיל ממעגל שקוטרו 1, מה היקפו? - $\pi \times 1 = \pi$
- נשרטט **ריבוע** שצלעותיו משיקות למעגל. כל צלע אורכה 1.
מה היקף הריבוע? - 4
- כעת נקפל כל קדקוד של הריבוע פנימה כך שייגע במעגל.
התקבלה **צורה חדשה**, מעט יותר קרובה אל המעגל, אבל
היקפה הוא כהיקף הריבוע, כלומר 4.



והנה הוכחה ש $\pi=4$, איפה השגיאה???

- נחזור על התהליך שוב, כעת מ-8 הקדקודים החיצוניים.
- לצורה החדשה יש עדיין אותו היקף כמו של קודמותיה – 4,
אבל היא הרבה יותר קרובה אל המעגל !
- אם נחזור על התהליך שוב ושוב הצורה תלך ותתקרב אל
המעגל ותשמור על ההיקף – 4.
- אבל היקף המעגל הוא π .
- ובכן? האם הוכחנו בכך ש- $\pi=4$?



הפרדוקס של רימן: אינסוף מינוס אינסוף π

- https://www.youtube.com/watch?v=-EtHF5ND3_s

והתייחסות אליו ב Quora

<https://www.quora.com/Why-is-infinity-minus-infinity-equals-to-pi>

מקורות ורשימה מומלצת לקריאה נוספת

- Cipra, B., 2006, " Digits of Pi". In Mackenzie, D., Cipra, B., 2006, *What's Happening in the Mathematical Sciences*, AMS.
- Sandifer, E., 2009, " How Euler did it- estimating π ", *MAA Online*,
<http://www.maa.org/editorial/euler/HEDI%2064%20Estimating%20Pi.pdf>
- <http://mathworld.wolfram.com/topics/Pi.html>
- <http://www.ynet.co.il/yaan/0,7340,L-880817-ODgwODE3XzE4MDE2MDI2NI8xNDg2ODcyMDAeq-FreeYaan,00.html>
- <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Euler.html>
- <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Leibnitz.html>
- <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Machin.html>
- <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Newton.html>
- [http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Van Ceulen.html](http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Van_Ceulen.html)
- http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Pi_chronology.html
- [http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Pi through the ages.html](http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Pi_through_the_ages.html)
- [http://www.pidayinternational.org/Pi_History/HISTORY OF PI Biblical Pi.htm](http://www.pidayinternational.org/Pi_History/HISTORY_OF_PI_Biblical_Pi.htm)

מקורות ורשימה מומלצת לקריאה נוספת

- <http://plus.maths.org/content/pi-not-piece-cake>
- [http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/HistTopics/Pi through the ages.html](http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/HistTopics/Pi%20through%20the%20ages.html)
- <http://pi.nersec.gov/>
- <http://www.squidoo.com/PiDay>
- <http://money.msn.com/business-news/article.aspx?feed=PR&Date=20120314&ID=14887531>
- <http://www.scientificamerican.com/article/what-is-pi-and-how-did-it/>
- בעברית, באתר מרכז מורים ארצי, על יום פאי ומשימות
http://highmath.haifa.ac.il/index.php?option=com_content&task=view&id=1074&Itemid=0
- בעברית, ערכים מדויקים של פאי במקורות היהדות
<http://u.cs.biu.ac.il/~tsaban/Pdf/exactpi.pdf>
- סדרה בת 7 פרקים קצרים על מאמר מאת חתן פרס נובל לשנת 1963 המתמטיקאי-פיסיקאי ההונגרי יוג'ין ויגנר https://www.youtube.com/watch?v=dK_narib4do
בשם: The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences
בפרק 2 יש ניתוח מאד מעניין על המקום המרכזי והמפתיע של המספר פאי במדעי הטבע

מקורות ורשימה מומלצת לקריאה נוספת

• על שאלת השאלות – ההגדרה של "פאי", מאת אלון עמית

<https://www.quora.com/What-is-math-pi-math/answer/Alon-Amit>

<https://www.quora.com/Why-is-pi-C-2r-C-is-the-circumference-of-a-circle-and-r-is-its-radius-unsatisfactory-as-a-definition-of-%CF%80>

• על מתמטיקאים קולנועיים מטורפים ו-216 הספרות של "פאי", באתר ידען

<http://www.gadial.net/?p=53>

• על דניאל טאמט, בעיתון כלכליסט- בארץ- ראש אחר

<http://www.calcalist.co.il/local/articles/0,7340,L-3525858,00.html>

• על המספרים ששינו את העולם ופאי בראשם, חדשות מעולם הגיקים

<http://www.newsgeek.co.il/numbers-that-changed-the-world/>

• שני תלמידים מתיכון בליך בר"ג, מדקלמים מאות ספרות של פאי

http://highmath.haifa.ac.il/index.php?option=com_content&task=view&id=2197

• משהו משעשע על פאי: כאשר מדינת אינדיאנה ניסתה לשנות את פאי ל-3.2:

<http://www.neatorama.com/2011/07/15/the-time-indiana-tried-to-change-pi-to-3-2/>

• פעילות באתר של מרכז המורים למתמטיקה בעל יסודי, נמצא בקישור :

http://highmath.haifa.ac.il/index.php?option=com_content&task=view&id=1074&Itemid=0